**OPERACJE NA GRAFACH**

Omówimy operacje:

- jednoargumentowe: dopełnienie grafu, graf liniowy

- dwuargumentowe: iloczyn kartezjański grafów.

1. DOPEŁNIENIE GRAFU

Rozpatrzmy graf  i jego graf częściowy . **Dopełnieniem grafu** do  nazywamy graf .

*Przykład 1*

Rysunek 1 Dopełnienie grafu  do .

Zazwyczaj jako graf  przyjmujemy graf zupełny  i wtedy mówimy o operacji dopełnienia w *klasie grafów zwyczajnych.*

Graf  Graf 

Liczba wierzchołków  

Liczba krawędzi  

*Przykład 2* Pokażemy dopełnienie grafu  z poprzedniego przykładu do 

Rysunek 2 Dopełnienie grafu  do 

**Graf samodopełniający** to taki, że = . Warunek konieczny to równoliczność zbiorów krawędzi i :

. (1)

Na to, aby było podzielne przez 4 potrzeba i wystarcza aby  albo , . Te warunki konieczne spełniają liczby  i wtedy liczby krawędzi wynoszą odpowiednio . Przykłady grafów samodopełniające o  są pokazane na Rysunku 3.

Rys. 3 Grafy samodopełniające o .

1. GRAF LINIOWY

**Graf liniowy** grafu  oznaczamy symbolem  lub . Wprowadza się graf liniowy zarówno dla grafu niezorientowanego i jak zorientowanego.

1.  - *graf niezorientowany*. Oznaczmy .
2. ,
3.  krawędzie mają wspólny wierzchołek w grafie .

*Przykład 3* Na rysunku 4a pokazany jest niezorientowany graf . Na krawędzie tego grafu są naniesione wierzchołki grafu . Graf  jest przedstawiony na Rys.4b.

Rys. 4 Graf niezorientowany  i jego graf liniowy .

Oznaczmy symbolami liczby wierzchołków i krawędzi grafu liniowego. Oczywiście

. (2)

Łatwo jest zauważyć, że jeżeli wierzchołek  grafu jest incydenty z krawędziami , to na wierzchołkach  w grafie  jest rozpięta klika. Zatem liczbę wyznaczymy za pomocą formuły

, (3)

gdzie  oznacza stopień tego wierzchołka grafu .

*Własność 1.* Graf spójny  jest izomorficzny ze swoim grafem liniowym  wtedy i tylko wtedy gdy  jest cyklem.

Przypuśćmy, że  jest izomorficzny z . Z warunków koniecznych izomorfizmu wynika, że . Na podstawie warunku (2) otrzymujemy . Ponieważ  jest spójny, to  musi być cyklem. Na odwrót, jeżeli  jest cyklem, to z konstrukcji grafu liniowego wynika, że jest cyklem.

*Przykład 4* Pokazać, że grafy  i mają ten sam graf krawędziowy.

*Przykład 5* Udowodnić, że jeżeli  jest grafem regularnym stopnia , to jego graf krawędziowy  jest grafem regularnym stopnia .

Wierzchołki końcowe  krawędzi  są stopnia . W grafie  wierzchołek  jest połączony z  krawędziami incydentnymi z wierzchołkiem  w grafie  i z  krawędziami incydentnymi z wierzchołkiem . Zatem .

1.  - *graf zorientowany*. graf zorientowany.

1. ,

2.  krawędzie mają wspólny wierzchołek i zgodną orientację w grafie .

Rys.5 Graf zorientowany i jego graf liniowy.

Jeżeli stopnie tego wierzchołka grafu  wynoszą  to liczba krawędzi grafu liniowego związanych z tym wierzchołkiem jest równa . Zatem całkowita liczba krawędzi grafu liniowego będzie równa

.

1. ILOCZYN KARTEZJAŃSKI GRAFÓW

Operacja dwuargumentowa grafy niezorientowane lub zorientowane):

.

1. *Grafy niezorientowane*
2. 
3. 

Rys.6 Iloczyn Kartezjański 

Oznaczmy:

- liczba wierzchołków grafu ,

- liczba krawędzi grafu .

Oczywiście .

Z warunku (2) wynika

.

1. *Grafy zorientowane*
2. 
3. 

Rys.7 Iloczyn Kartezjański grafów zorientowanych